B. (*espreguiçando-se*) Bem dia, amor; pensaste em mais erros nossos durante a noite?

A. Não, e tu?

B. Tu *sabes* que eu nunca penso em erros. Mas passou-me algo pela cabeça: é suposto estarem criados todos os números, mas $\frac{1}{3}$ nunca apareceu. Recordas-te de que estava à espera de o ver no "quarto dia", mas descobrimos que o número era $\frac{1}{4}$? Pensei, bem, $\frac{1}{3}$ é tardio, mas vai aparecer, mais cedo ou mais tarde. Agora apercebo-

-me, após analisar os números todos, de que $\frac{1}{3}$ ainda não está entre nós.

A. Todos os números criados têm uma representação finita em notação binária. Isto é, por exemplo, $3\frac{5}{8} = 11.101$ em notação binária. E, por outro lado, todos os números com representação binária finita *são* criados, mais cedo ou mais tarde. Por exemplo, $3\frac{5}{8}$ foi criado no... oitavo dia.

B. A notação binária é utilizada em computadores; talvez Conway estivesse a criar um mundo computorizado.

Qual é a representação binária de $\frac{1}{3}$?

A. Não sei, mas deve ter uma.

B. Oh, já me lembro, faz-se um género de divisão em base 2. Deixa cá ver... Obtive

$$\frac{1}{3} = 0.0101010101...$$

e assim *ad infinitum*. Não termina; é por isso que ainda não foi criado.

A. *Ad infinitum.* Isso lembra-me a última parte da inscrição.

O que achas que significa o dia $\aleph$ e essas coisas assim?

B. Parece um elogio metafísico, ou religioso, do sistema numérico. Típico de escritos antigos.

Por outro lado, parece estranho que Conway ainda apareça a falar após ter passado uma infinidade de dias. "Até ao fim do tempo", mas o tempo ainda não tinha acabado.

A. Estás em grande forma hoje.

B. Depois de uma infinidade de dias, acho que Conway olhou para todos esses números binários que tinha criado e... Oh, meu Deus! Aposto que ele *não* parou.

A. Tens razão! Ainda não tinha pensado nisso, mas a pedra parece dizer que ele continuou. E... Claro, obtém mais números, porque, pela primeira vez, pode usar para X_E e X_D conjuntos infinitos!

B. Talvez o tempo não flua a uma velocidade constante. Quer dizer, para nós os dias parecem ter todos o mesmo comprimento, mas, do ponto de vista de Conway, quando ele espreita o nosso universo, talvez possam passar cada vez mais rapidamente, numa escala absoluta extraceleste. Como se o primeiro dia terrestre durasse o mesmo que um dia celeste, mas o segundo durasse metade do dia celeste, o seguinte um quarto, e assim sucessivamente. Então, decorridos dois dias celestes, zap! Tinham passado infinitos dias terrestres, e estaríamos prontos para prosseguir.

A. Nunca tal tinha pensado, mas faz sentido. Num certo sentido, estamos na posição de Conway após ter passado uma infinidade de dias terrestres. Porque *sabemos* tudo o que aconteceu, tudo até ao dia $\aleph$!

B. (*gesticulando*) *Outra* vantagem da matemática: os nossos cérebros finitos podem abarcar o infinito.

A. Pelo menos o infinito numerável.

B. Mas os números reais não são numeráveis, e podemos compreendê-los.

A. Creio que sim, já que cada número real é simplesmente uma expansão decimal infinita.

B. Ou expansão binária.

A. Ei! Já sei o que aconteceu no dia $\aleph$ — foram criados os números reais!

B. (*de olhos esbugalhados*) Caramba, creio que tens razão.

A. Claro, obtemos $\frac{1}{3}$ tomando para X_E, por exemplo,

$$\{0.01, 0.0101, 0.010101, 0.01010101, \dots\}$$

em notação binária, e para X_D podemos tomar números que se aproximam de $\frac{1}{3}$ por valores superiores, como

$$\{0.1, 0.011, 0.0111, 0.0101011, 0.010101011, \dots\}.$$

B. E um número semelhante a π é obtido de forma semelhante. Não conheço a expansão decimal de π, mas suponhamos que é

$$\pi = 11.00100100001111\ldots$$

obtemos Π_E parando em todos os “1”:

$$\Pi_E = \{11.001, 11.001001, 11.00100100001, \ldots\}$$

e Π_D parando em cada “0” e somando 1,

$$\Pi_D = \{11.1, 11.01, 11.0011, 11.00101, \ldots\}.$$

A. Há muitos outros conjuntos que poderiam ser usados para Π_E e Π_D, uma infinidade deles, na realidade. Mas todos produzem um número equivalente a este, porque se trata do primeiro número a ser criado que é maior do que Π_E e menor do que Π_D.

B. (*abraçando-a de novo*) Então *é isso* que a pedra de Conway quer dizer quando refere que o universo foi criado no dia $\aleph$: os números reais são o universo.

Já ouviste falar da teoria do *big bang* que os cosmólogos tanto mencionam? É isto, dia $\aleph$: *bang!*

A. (*distraída*) Bill, há *outro* número criado no dia $\aleph$, um número que não pertence ao conjunto dos números reais. Tomemos para X_D o conjunto vazio e

$$X_E = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Este número é maior do que *todos* os outros.

B. Infinito! Infinito!

A. Penso que deve ser notado com a letra grega ω, sempre gostei desta letra. O número $-\omega$ também foi criado agora, quer dizer, menos infinito.

B. O dia $\aleph$ foi muito produtivo.

A. Agora no dia *seguinte*...

B. Queres dizer que $\aleph$ não foi o fim?

A. Oh, não, por que havia Conway de parar aqui? Tenho um palpite de que ainda mal tinha começado. O processo nunca termina, porque podemos sempre tomar para X_D o conjunto vazio e para X_E o conjunto de todos os números existentes.

B. Mas não pode haver muito para *fazer* no dia seguinte a $\aleph$, já que os números reais se agrupam de uma forma tão densa. A parte não infinita do universo está completa, não há espaço para introduzir novos números entre reais "adjacentes".

A. Não, Bill; era o que eu pensava até te referires a isso. Só prova que gosto de discutir contigo. Que tal tomarmos $X_E = \{0\}$ e

$$X_D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}?$$

Trata-se de um número *maior* do que zero e *menor* do que todos os números positivos! Podemos chamar-lhe ε.

B. (*desmaiando*) Ai... Já estou bem. Mas isto é quase *de mais,* isto é, tem de haver um limite.

O que me surpreende mais é que ε foi criado no dia $\aleph$, e *não* no dia seguinte, porque podíamos ter tomado

$$X_D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}.$$

Há montes de outros números loucos por aí, por exemplo,

$$\left(\{1\}, \left\{1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{8}, 1\frac{1}{16}, \ldots\right\}\right)$$

que é maior do que 1 por um cabelo.

E suponho que há um número semelhante a este junto de cada número, como π..., não, não pode ser...

A. O que está a seguir a π só aparece no dia seguinte a $\aleph$. Só as dízimas binárias finitas obtêm um número infinitamente próximo no dia $\aleph$.

B. No dia seguinte a $\aleph$ vamos obter também um número que está *entre* 0 e ε. E achas que Conway ainda está no começo.

A. O que é interessante, Bill, é que, para além de termos os números reais, o infinito, e todos os números entre estes... Também dispomos de regras que nos permitem dizer que número é maior do que outro e regras para os *somar* e *subtrair*.

B. Tens razão. Provámos todas essas regras, pensando que *sabíamos* do que estavámos a falar — tratava-se de um jogo, deduzir as leis usuais da aritmética das poucas regras de Conway. Mas agora descobrimos que as nossas demonstrações também se aplicam a uma infinidade de situações novas! Os números só têm os limites da nossa imaginação, e a nossa consciência está em expansão, e...

A. Sabes, para mim, tudo isto é como uma experiência religiosa, começo a ter Deus em melhor conta. Como, por exemplo, Ele está em toda a parte...

B. Mesmo entre os números reais.

A. Estou a falar a sério.

NÚMEROS SURREAIS / DONALD E. KNUTH ; TRAD. JORGE NUNO SILVA

AUTOR(ES):	Knuth, Donald E.; Silva, Jorge Nuno Oliveira e, 1956-, trad.
EDIÇÃO:	1a ed
PUBLICAÇÃO:	Lisboa : Gradiva, 2002
DESCR. FÍSICA:	111, [4] p. ; 23 cm
COLECÇÃO:	O prazer da matemática ; 29
NOTAS:	Tít. orig.: surreal numbers
ISBN:	972-662-853-9